Dp-ブレイン上のボソン的開弦の量子エンタングルメントについて

$\boldsymbol{Dp}$- ブレイン上のボソン的開弦の量子エンタングルメントについて

中川　弘一

（星薬科大学　物理学研究室）

概要

共変的な開弦の場の理論を用いて，多重 Dp-ブレイン上のボソン的開弦に対する量子エンタングルメントの研究が，参考文献 [1] で行われた．この研究では Dp-ブレインが付いている超平面に垂直な空間座標の一つを選び，その超平面を半分に分割し，Fock 空間表示における弦の波動関数を用いることにより，エンタングルメント・エントロピーが計算された．その結果，エンタングルメント・エントロピーは分割された超平面の $(p-1)$-次元的な境界の面積に比例し，紫外（UV）領域ならびに赤外（IR）領域において発散することがわかった．しかし，主要な発散はエンタングルメント・エントロピーに対するタキオンの寄与によるもので，超対称な弦理論では解消するであろうと考えられ，タキオンによる発散を別にすると，Dp-ブレイン上のボソン的開弦に対するエンタングルメント・エントロピーは，$2 \leq p \leq d_{\mathrm{cl}} - 2$ のときに有限で，$p = 1, d_{\mathrm{cl}} - 1$ のときに対数的に発散することが議論された．本稿では参考文献 [1] に基づき，以上の計算と議論についての詳細な解説を行う．

1　序論

エンタングルメント・エントロピー [2] は，幾何学的なエントロピー [3–9] ともよばれ，物性物理学 [10–12]，量子場理論 [13–19]，量子情報理論 [20,21]，量子重力とブラックホール物理学 [22–31] および弦理論における AdS/CFT 対応 [32–36] を包括する，理論物理学の広い範囲を覆いつくす，最近の発展の中の焦点となった．ブラックホールの理論に関する Bekenstein [37,38] と Hawking [39] の独創的な論文が発表されて以来，ブラックホールの熱力学は，40 年以上もの間，重力，量子論，熱力学および情報理論の間にある基礎的な関係性を理解することに向けての広範囲な研究の背後で主な原動力となってきた．こ

の研究の礎石となるものが，ブラックホールの量子状態数を表し，Bekenstein-Hawking エントロピーとして知られる，ブラックホール・エントロピーである．

ブラックホール・エントロピーに起因する基本的自由度を見出すために，多くの努力がなされてきた [40]．これらの努力は，最終的に，我々を一貫した重力の量子論に導いてくれる可能性を秘めている．2 つに分割された空間上の量子場理論を定義することによって [41]，ブラックホール・エントロピーの起源を説明するために，エンタングルメント・エントロピーはその研究分野において注目されるようになった [3,4]．これは，Bekenstein-Hawking エントロピーがブラックホール・ホライズンの面積に比例することと同様に，エンタングルメント・エントロピーが，空間を 2 つの部分空間に分割している，境界面の面積に比例するためである．しかしながら，局所的な場の量子論を用いて計算されたエンタングルメント・エントロピーは，有限な Bekenstein-Hawking エントロピーとは対照的に，通常通りの紫外領域における二点相関関数の発散的な振舞いにより，本質的に発散する．文献 [6,23] において，Bekenstein-Hawking エントロピーは古典論的なレベルでのブラックホール・エントロピーであるのに対し，エンタングルメント・エントロピーはブラックホール・エントロピーに対する第一次の量子補正にあたることが指摘された．このエンタングルメント・エントロピーの紫外発散は量子場理論のくり込みの処方により対処できると考えられる．つまり，エンタングルメントエントロピーの発散する量子補正はくり込まれた Newton 定数に吸収することができるであろうと考えられる [23,42]．ただし，重力作用に対する 1 ループの量子補正と発散エンタングルメント・エントロピーを比較すると，非極小結合がある場合，エンタングルメント・エントロピーのくり込みとニュートン定数のくり込みとの間に不整合が見つかる可能性がある [43,44]．これを非極小結合のパズルとよぶ．

ブラックホールのエントロピーに対するより有望なアプローチは，弦理論によって提供される可能性がある [23]．弦理論は紫外領域で有限であると考えられているので，弦理論におけるエントロピーは有限であると考えられる．ツリーレベル（ループダイヤグラムを含まない）での弦理論は，ブラックホールに対するある有限なエンタングルメント・エントロピーと Newton 定数を同時に与えるであろうと考えられる．Bekenstein-Hawking エントロピーは，あるクラスの極限ブラックホールと近似的な極限ブラックホールを記述する BPS ソリトンの微視的状態を数え上げること [45,46] によって得られたことにも注目

すべきであろう [47–49]．したがって，弦理論はブラックホール・エントロピーを基礎的なレベルで理解するための本質的な手がかりを提供する可能性がある．

ブラックホール・エントロピーに関する最近の進展は AdS/CFT 対応に由来するところが大きい [50]．AdS/CFT 対応によると，AdS 空間の境界面上で定義された共形場理論（CFT）は，AdS 空間のバルクにおける重力理論と等価であろうと考えられる．AdS/CFT 対応の手法にしたがい，Ryu と Takayanagi は，AdS 空間の空間的な境界面上の閉じた部分空間 Σ に関するエンタングルメント・エントロピー S_Σ を定義できるように Σ を選ぶと，そのエントロピーは，Σ と同じ境界を共有する，AdS 空間のバルクにおける極小面 Γ の面積 $A(\Gamma)$ と，CFT と双対な重力理論における Newton 定数 G_N によって決まるであろうということを提唱した．つまり，$S_\Sigma = A(\Gamma)/4G_N$, $\partial\Sigma = \partial\Gamma$ ということである．この提唱された関係式 $S_\Sigma = A(\Gamma)/4G_N$ はブラックホールに関する Bekenstein-Hawking のエントロピー公式 $S_{\mathrm{BH}} = A_{\mathrm{BH}}/4G_N$（$A_{\mathrm{BH}}$ はブラックホール・ホライズンの面積）と酷似していることは注目すべきであろう．実際，境界面のエンタングルメント・エントロピーは，Ryu-Takayanagi の関係式を用いて，Bekenstein-Hawking のエントロピーとして表されることが，文献 [51] で明らかに示されている．

Bekenstein-Hawking エントロピーとエンタングルメント・エントロピーに関する研究は多数存在するが，ブラックホールの Bekenstein-Hawking エントロピーの原因となる，基本的自由度が何であるかという疑問は未解決のままになっている．この疑問は，弦の完全な自由度を考慮に入れた，弦の場の理論においてより良く理解されると考えられる．そのため本稿では，参考文献 [1] で行われた，共変的弦の場の理論 [52–55] を用いた Dp-ブレイン上のボソン的開弦に対するエンタングルメント・エントロピーの研究をレビューすることにする．

Dp-ブレインは，空間的 p 次元の超平面によって記述される，拡がりをもった物体で，その上に開弦の端点を具えている．ここでは，1 枚の超平面上に局在する多重 Dp-ブレインを考え，その超平面上のある方向に沿ってその超平面を 2 つに分割する．そこで，Fock 空間表示における弦の場をもちいて，弦の密度行列を定義する．そして，開弦に対するエンタングルメント・エントロピーはレプリカ・トリックを適用することによって得られる．その結果として得られたエンタングルメント・エントロピーは分割された超平面の $(p-1)$ 次元境界面の面積に比例し，予想通り発散している．しかし，その UV 領域およ

び IR 領域における主要な発散は主に開弦に含まれているタキオンモードによるものであり，超対称性を具えた弦理論（超弦理論）においては消えることが予想できる．タキオンの寄与によるこれらの発散を除くと，Dp-ブレイン上のボソン的開弦に対するエンタングルメント・エントロピーは，$2 \leq p \leq d_{\mathrm{cl}} - 2 = 24$ において有限であり， $p = 1, 25$ において対数発散する．その結果，ある弦の重い励起状態の無限塔は理論の UV および IR 領域の振舞を大きく変化させることが予想できる．

2 $\boldsymbol{Dp}$-ブレイン上のボソン的開弦とその密度行列

Dp-ブレインは，空間的 p 次元の超平面によって記述され，その上に開弦の端点を具えているということは次のようなことである．開弦座標 X^μ, $\mu = 0, 1, \cdots, p$, の端点は Neumann 境界条件

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}\Big|_{\sigma=0,\,\pi} = 0, \quad \text{for} \quad \mu = 0, 1, \cdots, p \tag{1}$$

を満たし，開弦座標 X^i, $i = p+1, \cdots, d$, の端点は Dirichlet 境界条件

$$X^i\Big|_{\sigma=0,\,\pi} = 0, \quad \text{for} \quad i = p+1, \cdots, d \tag{2}$$

を満たしているものとする．このとき，開弦座標 X^μ, $\mu = 0, 1, \cdots, p$ は Dp-ブレインの世界体積に接する方向を向き，一方，開弦座標 X^i, $i = p+1, \cdots, d = d_{\mathrm{cl}} - 1$ はその接平面に対し垂直な方向を向いていることになる．ここでは $1 \leq p \leq d_{\mathrm{cl}} - 1$ の Dp-ブレインを考えることにする．境界条件 (1) と (2) より，開弦座標 X^I, $I = 0, 1, \cdots, d$ は，振動の基準モードを用いて，

$$X^\mu(\sigma) = x^\mu + \sqrt{2}\sum_{k=1} x_k^\mu \cos(k\sigma), \quad \mu = 0, 1, \cdots, p, \tag{3}$$

$$X^i(\sigma) = \sqrt{2}\sum_{k=1} x_k^i \sin(k\sigma), \quad i = p+1, \cdots, d \tag{4}$$

と展開した形に表すことができる．このときに，開弦座標 X^i, $i = p+1, \cdots, d$ にはゼロモードが含まれていないことに注意すると，開弦の端点が n 枚の多重 Dp-ブレインについている場合には，開弦の場 Ψ は $\mathrm{U}(n)$ 群のインデックス $0, 1, \cdots, n^2 - 1$ をもち，

$$\Psi[X] = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi^0[X] + \Psi^a[X]T^a, \quad a = 1, \cdots, n^2 - 1 \tag{5}$$

と表される．ここで，T^a，$a=1,\cdots,n^2-1$ は $\mathrm{SU}(n)$ 群の生成子である．

BRST 不変な弦の場の理論の作用は，Witten の cubic 開弦の場の理論 [56] を拡張することにより，

$$S_{\mathrm{BRST}}=\int \mathrm{tr}\left(\Psi*Q\Psi+\frac{2g}{3}\Psi*\Psi*\Psi\right) \tag{6}$$

で与えられる．それは，弦座標 X^I の通常の基準モード展開を (3) 式と (4) 式のようなものに置き換えるだけである．ここでは，自由弦理論に対するエンタングルメント・エントロピーの計算に限定するため，$g=0$ と取ることにする．フェルミオン的ゴーストゼロモードを積分すると，固有時ゲージでの弦の場の作用 [52]

$$S_0=\int \mathrm{tr}\,\Psi\left(L_0+L_0^{\mathrm{gh}}\right)\Psi, \tag{7}$$

$$L_0+L_0^{\mathrm{gh}}=p^\mu p^\nu\eta_{\mu\nu}+\sum_{k=1}k\,a_k^{\dagger I}a_k^J\eta_{IJ}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}k a_{ik}^{\mathrm{gh}\dagger}a_{ik}^{\mathrm{gh}}-1 \tag{8}$$

が得られる．ここで，a_{ik}^{gh}，$i=1,2$ は BRST ゴースト座標の Fourier 成分であり，$\{a_{ik}^{\mathrm{gh}},a_{j\ell}^{\dagger\mathrm{gh}}\}=\delta_{ij}\delta_{k\ell}$ を満たす．通常の BRST ゴースト座標は a_{ik}^{gh}, $i=1,2$ を用いて，

$$b_{zz}(\sigma)=\frac{b_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}\left(a_{1k}^{\mathrm{gh}}e^{-ik\sigma}-ia_{2k}^{\dagger\mathrm{gh}}e^{ik\sigma}\right), \tag{9}$$

$$b_{\bar z\bar z}(\sigma)=\frac{b_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}\left(a_{1k}^{\mathrm{gh}}e^{ik\sigma}-ia_{2k}^{\dagger\mathrm{gh}}e^{-ik\sigma}\right), \tag{10}$$

$$c^z(\sigma)=\frac{c_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}\left(a_{1k}^{\dagger\mathrm{gh}}e^{ik\sigma}+ia_{2k}^{\mathrm{gh}}e^{-ik\sigma}\right), \tag{11}$$

$$c^{\bar z}(\sigma)=\frac{c_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}\left(a_{1k}^{\dagger\mathrm{gh}}e^{-ik\sigma}+ia_{2k}^{\mathrm{gh}}e^{ik\sigma}\right) \tag{12}$$

と展開することができる．

エンタングルメント・エントロピーを計算するためには，開弦を表現する，矛盾なく定まった局所場の作用素を見つける必要がある．そのためには弦の場の Fock 空間表現

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle&=\sum_{\{N_k^B,N_k^{\mathrm{gh}},k=1,2,3,\cdots\}}\sum_a\Psi^a_{\{N_k^B,N_k^{\mathrm{gh}}\}}(x^\mu)T^a|\{N_k^B,N_k^{\mathrm{gh}},k=1,2,3,\cdots\}\rangle\\&=\sum_a\left(\phi^a(x)+A_\mu^a(x)a_1^{\mu\dagger}+\varphi_i^a(x)a_1^{i\dagger}+\cdots\right)T^a|0\rangle\end{aligned} \tag{13}$$

が適しているであろう．ここで，ϕ^a, A^a_μ, φ^a $a = 0, 1, \cdots, n^2 - 1$ は，それぞれ，タキオン場，Yang-Mills ゲージ場と質量ゼロのベクトル場に対応する．このとき，重い高スピン場の無限の塔は省略されている．(13) 式を使って，弦の真空波動汎関数が

$$\Phi[\Psi] = \langle 0|\Psi\rangle = \frac{1}{Z}\int_{\Phi_{\{N_k, N_k^{\mathrm{gh}}\}}(-\infty, x^1, \cdots, x^p)=0}^{\Phi_{\{N_k, N_k^{\mathrm{gh}}\}}(0, x^1, \cdots, x^p)=\Psi_{\{N_k, N_k^{\mathrm{gh}}\}}(x^1, \cdots, x^p)} D[\Phi] e^{-S_0(\Phi)} \quad (14)$$

と書けることがわかる．ここで，Z は規格化定数である．弦の場に対する真空密度行列はこの基底において

$$\rho[\Psi, \Psi'] = \langle\Psi|0\rangle\langle 0|\Psi'\rangle = \Phi[\Psi]^*\Phi[\Psi'] \quad (15)$$

と定義できる．これは，通常の量子場に対する真空密度行列の定義の仕方と同様である．

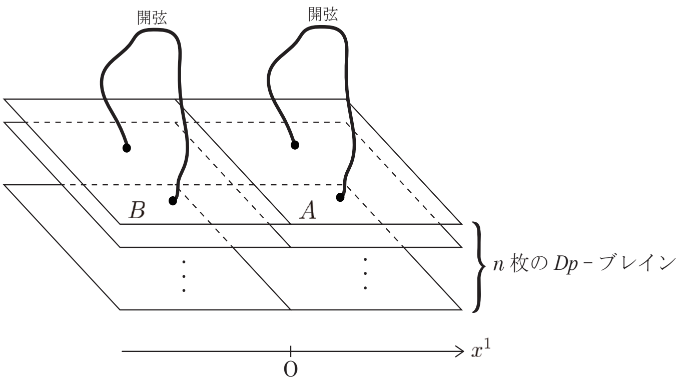

図 1　二分割された Dp-ブレイン上の開弦

つぎに，図 1 にあるように，p 次元の超平面を半分に分け，$x^1 > 0$ の半超平面 A と $x^1 < 0$ の半超平面 B にする．したがって，弦の波動汎関数は直和 $\Psi = \Psi_A \oplus \Psi_B$ と表すことができる．そこで，B 上では一致する 2 つの波動汎関数 $\Psi = \Psi_A \oplus \Psi_B$ と $\Psi' = \Psi'_A \oplus \Psi_B$ を考える．そのとき，半超平面 A における縮約密度行列も弦の真空波動汎関数の場合と同様に定義できる．B についての取り得るすべての汎関数 Ψ_B について

積分し,

$$\rho_A(\Psi,\Psi') = \int D[\Phi_B]\Phi[\Psi_A \oplus \Psi_B]^*\Phi[\Psi'_A \oplus \Psi_B]$$
$$= \frac{1}{Z}\int_{\Phi_{\{N_k,N_k^{\mathrm{gh}}\}}(0^-,x^1,\cdots,x^p)=\Psi'_{\{N_k,N_k^{\mathrm{gh}}\}}(x^1,\cdots,x^p)}^{\Phi_{\{N_k,N_k^{\mathrm{gh}}\}}(0^+,x^1,\cdots,x^p)=\Psi_{\{N_k,N_k^{\mathrm{gh}}\}}(x^1,\cdots,x^p)} D[\Phi]e^{-S_0(\Phi)} \tag{16}$$

を得る．結果として，縮約密度行列の n 乗のトレース $\mathrm{tr}\rho_A^n$ は，n 枚の重なった Riemann 面上の経路積分として,

$$\mathrm{tr}\rho_A^n = \frac{Z_A(n)}{Z_A(1)^n} \tag{17}$$

と表される．n についての解析接続をし，$n=1$ での微分をとると，開弦の場に対するエンタングルメント・エントロピー

$$S_{\mathrm{ent}} = \lim_{n\to 1}\left[-\frac{\partial}{\partial n}\mathrm{tr}\rho_A^n\right] = \lim_{n\to 1}\left[-\frac{\partial}{\partial n}\Big\{\ln Z_A(n) - n\ln Z_A(1)\Big\}\right] \tag{18}$$

が得られる．この方法はレプリカ法とよばれる．

3 開弦の場に対するエンタングルメント・エントロピーの計算

Fock 空間表現における開弦の場はタキオン，質量ゼロの場および無限個の重い場から成っている．Fock 空間表現において，開弦の成分場に対する自由場の作用は個数作用素 $N_B + N_{gh} - 1$ の固有値によって与えられる質量をもったスカラー場の作用

$$S_0 = \int \sum_{\{N_k^B,N_k^{\mathrm{gh}},k=1,2,3,\cdots\}} \Psi^{a\dagger}_{\{N_k^B,N_k^{\mathrm{gh}}\}}\left(p^2 + N_B + N_{gh} - 1\right)\Psi^a_{\{N_k^B,N_k^{\mathrm{gh}}\}}, \tag{19}$$

$$N_B = \sum_{k=1} k a_k^{I\dagger}a_k^I, \quad I = 0,1,\cdots,d, \tag{20}$$

$$N_{gh} = \sum_{k=1} k\left(a_{1k}^{\dagger\mathrm{gh}}a_{1k}^{\mathrm{gh}} + a_{2k}^{\dagger\mathrm{gh}}a_{2k}^{\mathrm{gh}}\right) \tag{21}$$

と同じであることに注意すると，成分場 $\Psi^a_{\{N_k^B,N_k^{\mathrm{gh}}\}}$ の統計性は,

$$F_{gh} = \sum_{k=1}\left(a_{1k}^{\dagger\mathrm{gh}}a_{1k}^{\mathrm{gh}} + a_{2k}^{\dagger\mathrm{gh}}a_{2k}^{\mathrm{gh}}\right) \tag{22}$$

を担う全ゴースト数によって決まる．このように，開弦に対するエンタングルメント・エントロピーは重いスカラー場の結果を直接応用することで得られる．

重いスカラー場に対するエンタングルメント・エントロピーの計算は文献 [13] に見られる．この計算に多少の修正をすることで, 開弦の場のエンタングルメント・エントロピーの計算に用いることができる．$(p+1)$ 次元における質量 m の自由スカラー場に対し, n 枚の重なった Riemann 面上で定義された分配関数 $Z(n)$ は $\ln Z(n) = -\frac{1}{2}\ln \mathrm{Det}\left[-\Delta + m^2\right]$ と書くことができる．$n=1$ 近傍で n を解析接続すると，n 枚の重なった Riemann 面は欠損角 $\delta = 2\pi(1-n)$ の円錐空間 $\mathcal{R}^n$ になる．分配関数 $Z(n)$ は，円錐空間における重い場に対する Green 関数 $G_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ と次のような関係

$$\frac{\partial}{\partial m^2}\ln Z(n) = -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}^n} d^{p+1}\boldsymbol{x}\ \lim_{\boldsymbol{x}'\to\boldsymbol{x}} G_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \tag{23}$$

があり，ここで，$\boldsymbol{x} = (x^0, x^1, \cdots, x^p) = (x^0, x^1, \boldsymbol{x}_\perp)$ である．

Green 関数 $G_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ の表式は

$$\begin{aligned} G_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{2\pi n}\int \frac{d^{p-1}\boldsymbol{p}_\perp}{(2\pi)^{p-1}} \\ \times \sum_{\ell=0}^{\infty} d_\ell \int_0^\infty dq\, q \frac{J_{\ell/n}(qr)J_{\ell/n}(qr')}{q^2+m^2+p_\perp^2}\cos\left(\frac{\ell}{n}(\theta-\theta')\right) e^{i\boldsymbol{p}_\perp\cdot(\boldsymbol{x}_\perp - \boldsymbol{x}'_\perp)} \end{aligned} \tag{24}$$

と表され, この式において, J は第 1 種 Bessel 関数であり, $\ell \geq 1$ に対し $d_0 = 1$, $d_\ell = 2$ である．また, (r, θ) は 2 次元 (x^0, x^1) 平面上における極座標であり [13], $\boldsymbol{p}_\perp = (p^2, \cdots, p^p)$ である．同一点極限 $\boldsymbol{x}' \to \boldsymbol{x}$ における Green 関数の表式を使うと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m^2}\ln \mathrm{tr}\,\rho^n &= \frac{\partial}{\partial m^2}\ln\frac{Z(n)}{Z(1)^n} = -\frac{1}{2}\left\{\int_{C^n} d^{p+1}\boldsymbol{x} G_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - n\int d^{p+1}\boldsymbol{x} G_1(0)\right\} \\ &= -\frac{1-n^2}{24n}A_\perp \int \frac{d^{p-1}\boldsymbol{p}_\perp}{(2\pi)^{p-1}}\frac{1}{m^2+p_\perp^2} \end{aligned} \tag{25}$$

が得られ，ここで，$A_\perp$ は (x^0, x^1) 平面に垂直な境界超曲面の面積で，$A_\perp = \int d^{p-1}\boldsymbol{x}_\perp$ である．n で微分して，m^2 で積分を実行すると，重い場のエンタングルメント・エントロピー

$$\begin{aligned} S_A &= -\frac{1}{12}A_\perp \int \frac{d^{p-1}\boldsymbol{p}_\perp}{(2\pi)^{p-1}}\ln\left(m^2+p_\perp^2\right) = \frac{A_\perp}{12}\int\frac{ds}{s}\int\frac{d^{p-1}\boldsymbol{p}_\perp}{(2\pi)^{p-1}}\exp\left\{-s\left(p_\perp^2+m^2\right)\right\} \\ &= \frac{A_\perp}{12}\frac{1}{(8\pi^2)^{\frac{p-1}{2}}}\int_0^\infty dt \frac{1}{t^{\frac{p+1}{2}}}e^{-2\pi m^2 t} \end{aligned} \tag{26}$$

が導かれる．ここで，$t = s/(2\pi)$ である．

この結果は Fock 空間表現での弦の場に適用可能である．この結果を，ボソン・セクター ($N_k^{\mathrm{gh}} = 0,\ k = 1, 2, \cdots$) における開弦のエンタングルメント・エントロピーに直接適用すると，

$$S_A^{開弦} = \frac{A_\perp}{12} \int \frac{ds}{s} \int \frac{d^{p-1}\boldsymbol{p}_\perp}{(2\pi)^{p-1}} \mathrm{Tr} \exp\left\{-s\left(p_\perp^2 + N_B - 1\right)\right\} \tag{27}$$

となり，このとき，‘Tr’ は Fock 空間ならびに $U(n)$ 群空間でのトレースを表す．ボソン的調和振動子の代数 [57] から

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, e^{-sN_B} &= n^2 \sum_{\{N_k^B\}} \exp\left\{-s \sum_{k=1} k N_k^B\right\} = n^2 \prod_{k=1} \left(\frac{1}{1-e^{-sk}}\right)^{d+1} \\ &= n^2 e^{-\frac{d+1}{24}s} \frac{1}{\eta\left(\frac{is}{2\pi}\right)^{d+1}} \end{aligned} \tag{28}$$

となり，このとき，$\eta(\tau)$ は $\eta(\tau) := e^{i\pi\tau/12} \prod_{k=1} \left(1 - e^{2\pi i k\tau}\right)$ で定義される Dedekind の η 関数である．このように，ボソン・セクターにおける開弦のエンタングルメント・エントロピー

$$S_A^{開弦} = \frac{A_\perp}{12} \frac{n^2}{(8\pi^2)^{\frac{p-1}{2}}} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{1}{t^{\frac{p-1}{2}}} \exp\left\{\left(1 - \frac{d+1}{24}\right) 2\pi t\right\} \frac{1}{\eta(it)^{d+1}} \tag{29}$$

が計算され，ここで，$t = s/(2\pi)$ である．

ゴースト・セクターの寄与を考慮すると，開弦のエンタングルメント・エントロピーは

$$S_A^{開弦} = \frac{A_\perp}{12} \int \frac{ds}{s} \int \frac{d^{p-1}\boldsymbol{p}_\perp}{(2\pi)^{p-1}} \mathrm{Tr} \exp\left\{-s\left(p_\perp^2 + N_B + N_{gh} - 1\right)\right\} (-1)^{F_{gh}} \tag{30}$$

となり，このとき，

$$N_{gh} = \sum_{k=1} k\left(a_{1k}^{\dagger\mathrm{gh}} a_{1k}^{\mathrm{gh}} + a_{2k}^{\dagger\mathrm{gh}} a_{2k}^{\mathrm{gh}}\right), \quad F_{gh} = \sum_{k=1} \left(a_{1k}^{\dagger\mathrm{gh}} a_{1k}^{\mathrm{gh}} + a_{2k}^{\dagger\mathrm{gh}} a_{2k}^{\mathrm{gh}}\right) \tag{31}$$

である．(30) 式では，ゴースト座標のフェルミオン的な統計性に注意して，$(-1)^{F_{gh}}$ 因子を導入した．公式

$$\sum_{\{N_{gh}\}} e^{-sN_{gh}} (-1)^{F_{gh}} = \prod_{k=1} \left(1 - e^{-sk}\right)^2 = e^{\frac{s}{12}} \eta\left(\frac{is}{2\pi}\right)^2 \tag{32}$$

を用いて，エンタングルメント・エントロピー $S_A^{\text{開弦}}$ を

$$S_A^{\text{開弦}} = \frac{A_\perp}{12}\frac{n^2}{(8\pi^2)^{\frac{p-1}{2}}}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{1}{t^{\frac{p-1}{2}}}\exp\left\{\left(\frac{25-d}{24}\right)2\pi t\right\}\frac{1}{\eta(it)^{d-1}} \tag{33}$$

と書くことができる．$d = d_{\text{crtical}} - 1 = 25$ のボソン的弦理論に対しては

$$S_A^{\text{開弦}} = \frac{A_\perp}{12}\frac{n^2}{(8\pi^2)^{\frac{p-1}{2}}}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{1}{t^{\frac{p-1}{2}}}\frac{1}{\eta(it)^{24}} \tag{34}$$

となる．

(34) 式の被積分関数の赤外 (IR) 領域と紫外 (UV) 領域での振舞は p に非常に強く依存していることがわかる．被積分関数の IR での振舞は Dedekind の η 関数の漸近展開 [57]

$$\eta(it) = e^{-\frac{\pi}{12}t}\left(1 - e^{-2\pi t} - e^{-4\pi t} + \cdots\right), \quad t \to \infty \tag{35}$$

から読み取ることができる．漸近領域において，被積分関数は

$$\frac{1}{t^{\frac{p+1}{2}}}\frac{1}{\eta(it)^{24}} = \frac{1}{t^{\frac{p+1}{2}}}\left\{e^{2\pi t} + 24 + \mathcal{O}(e^{-2\pi t})\right\} \tag{36}$$

となる．(34) 式，(36) 式と (26) 式の重いスカラー場のエンタングルメント・エントロピーを比較すると，主要発散はタキオンの寄与によるものであることがわかる．この主要発散の他に，開弦についてのエンタングルメント・エントロピーは高々対数的に発散する．その IR 領域での振舞は，$p \geq 2$ に対しては有限値であり，$p = 1$ に対しては対数発散である．この結果は，無限種類ある重い状態がエンタングルメント・エントロピーの IR 領域での振舞を改善するであろうという予想と矛盾しないことがわかる．

UV 領域は $t = 0$ 近傍の領域に対応する．Dedekind の η 関数のモジュラー変換 $\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$ を使用し，$s = 1/t$ により $S_A^{\text{開弦}}$ に対する積分を書き換えると，

$$S_A^{\text{開弦}} = \frac{A_\perp}{12}\frac{n^2}{(8\pi^2)^{\frac{p-1}{2}}}\int_0^\infty ds\, s^{\frac{1}{2}(p-27)}\frac{1}{\eta(is)^{24}} \tag{37}$$

を得る．$s \to \infty$ に対応する UV 領域での被積分関数は漸近的に

$$s^{\frac{1}{2}(p-27)}\frac{1}{\eta(is)^{24}} = s^{\frac{1}{2}(p-27)}\left\{e^{2\pi s} + 24 + \mathcal{O}(e^{-2\pi s})\right\} \tag{38}$$

のように展開できる．主要発散は再び，“閉弦チャンネル” におけるタキオンの寄与に帰し，超対称な弦理論においては無くなることであろう．タキオンからの寄与を除くと，エンタングルメント・エントロピーは $p \leq 24$ に対して UV 領域で有限値をとり，$p = 25$ に対しては対数的に発散する．

4　結論と議論

[1] で行われた，$1 \leq p \leq 25$ に対する多重 Dp-ブレイン上のボソン的開弦に対するエンタングルメント・エントロピーの計算について精査した．局所的な場の作用素を定義するために，共変的弦の場の理論と開弦の波動汎関数の Fock 空間表示を採用した．Dp-ブレインの空間次元を構成する p 次元超曲面は半分に分割された．過去になされた [13]，重い場のエンタングルメント・エントロピーの計算法を直接開弦の場のエンタングルメント・エントロピーの計算に適用することにより，開弦のエンタングルメント・エントロピーの計算を遂行することができた．それを実行するためには多少の修正が必要であった．エントロピーは，予想通り，2 つに分割した p 次元超曲面の境界の面積に比例していることが確かめられた．しかし，その UV 領域および IR 領域の振舞は局所的場の理論の場合とは全く異なっていた．その振舞は UV 領域と IR 領域の両方について発散していたが，これらの発散はタキオンの寄与に帰すことができ，超対称な理論においては無くなるであろうと予想できる．タキオンによる主要発散を除去すれば，開弦のエンタングルメント・エントロピーは局所的場の理論のエンタングルメント・エントロピーよりも良い振舞をする．開弦のエンタングルメント・エントロピーは，$2 \leq p \leq d_{\rm cl} - 2 = 24$ の場合には UV 領域と IR 領域の両方について有限値になり，$p = 1, 25$ の場合には高々対数的に発散する．[1] の研究で，開弦のエンタングルメント・エントロピーの UV 領域並びに IR 領域の振舞にたいし，開弦に含まれる無限種類の重い場が強く影響を及ぼしていることが明らかに示された．

今後の展望に関するいくつかの意見を整理しておく．多重 Dp-ブレイン上の超対称な開弦に対するエンタングルメント・エントロピーの計算は，近い将来に遂行されなければならない重要な急務である．超対称な弦理論では，エンタングルメント・エントロピーは有限かまたは高々対数発散をすることが期待できる．Dp-ブレイン上の開弦のエンタングルメント・エントロピーは開弦の 1 ループ振幅 [58] と類似しているが，ここで計算した開弦のエンタングルメント・エントロピーは 1 ループ補正ではなく，ツリーレベルの量である．このように，ここでの計算結果は，Susskind と Uglum [23] による，ブラックホール・エントロピーは弦理論のエンタングルメント・エントロピーとして理解できるという

提案を支持するものである．

質量ゼロのゲージ場は成分の一つとして弦の場の中に含まれている．しかし，ゲージ対称性はBRST形式において完全に固定されている．もし，エンタングルメント・エントロピーを計算するときにBRSTゴースト・セクターを考慮するならば，成分場 $\Psi^a_{\{N_k^B, N_k^{\mathrm{gh}}\}}$ は質量 $N_B + N_{gh} - 1$ をもったスカラー場として扱われるはずである．ここでは，自由な弦の場の理論のエンタングルメント・エントロピーだけが議論された．しかし，この計算法を拡張し，相互作用の入った弦の場の理論のエンタングルメント・エントロピーを研究することはそう難しくはないであろう．開弦の場の理論の cubic 相互作用はエンタングルメント・エントロピーに対し古典論的かつ量子論的な補正を生成することであろう．

また，低エネルギー極限で現象論的にも興味深い場の理論的なモデルを生成するような，より複雑な形状の Dp-ブレインに付いた開弦のエンタングルメント・エントロピーを研究することもできるであろう．しかし，今後の発展において非常に重要なことは共変的な閉弦の場の理論の枠組みの中でエンタングルメント・エントロピーを研究することであろう．この点で，固有時間ゲージでの共変的な閉弦の場の理論 [59] が開弦のエンタングルメント・エントロピーを研究するためには欠くことができない道具として役に立つことであろう．最近の研究の中で，固有時間ゲージでの共変的な閉弦の場の理論が低エネルギー極限での重力子の散乱振幅を生成することが成功裏に示された．開弦の場の理論のエンタングルメント・エントロピーと閉弦の場の理論のエンタングルメント・エントロピーを比較することは，関連した問題にヒントを与えるであろうと考えられる．

ごく最近では，Balasubramanian と Parrikar [60] により，光円錐ゲージでの場の理論を使った，開弦のエンタングルメント・エントロピーが計算された．彼らの結果は，$D25$-ブレインを満たす空間上での開弦のエンタングルメント・エントロピーに対応している．さらに，文献 [61–63] では，異なるセッティングでの弦理論のエンタングルメント・エントロピーが研究された．

以上のような理論的枠組みを，有限温度系に拡張するという方向性も考えられる．従来の有限温度における弦理論の 1 ループ振幅は熱場ダイナミックス (TFD) を用いて計算され，温度の変数について解析接続することにより，その解析性が議論された [64–67]．その結果，弦理論の Hagedorn 温度より低い温度領域では，1 ループ振幅の解析性が良くなることが示された．一方，TFD による，有限温度におけるスピン系のエンタングルメン

ト・エントロピーの研究もなされている [68, 69]．これ等に倣って，TFD の枠組みの中で，有限温度における弦理論のエンタングルメント・エントロピーを計算し，温度領域におけるその振舞いを議論してみることは大変興味深いことであり，今後の有望な課題の一つとして挙げることができる．

参考文献

[1] T. Lee, Phys. Lett. B **782**, 589 (2018).

[2] J. Eisert, M. Cramer, and M. B. Plenio, Rev. Mod. **82**, 277 (2010).

[3] L. Bombelli, R. Koul, J. Lee, and R. Sorkin, Phys. Rev. D **34**, 373 (1986).

[4] M. Srednicki, Phys. Rev. Lett. **71**, 666 (1993).

[5] C. Holzey, F. Larsen, and F. Wilczek, Nucl. Phys. B **424**, 443 (1994).

[6] C. Callan and F. Wilczek, Phys. Lett. B **333**, 55 (1994).

[7] J. S. Dowker, Class .Quant. Grav. **11**, L55 (1994).

[8] F. Larsen and F. Wilczek, Annals Phys. **243**, 280 (1995).

[9] H. Casini, Class. Quant. Grav. **21**, 2351 (2004).

[10] T. J. Osborne and M. A. Nielsen, Phys. Rev. A **66**, 032110 (2002).

[11] A. Osterloh, L. Amico, G. Falci, and R. Fazio, Nature **416**, 608 (2002).

[12] G. Vidal, J. I. Latorre, E. Rico and A. Kitaev, Phys. Rev. Lett. **90**, 227902 (2003).

[13] P. Calabrese and J. L. Cardy, J. Sat. Mech. **0406**, P06002 (2004).

[14] H. Casini and M. Huerta, J. Stat. Mech. **0801**, P01012 (2008).

[15] H. Casini and M. Huerta, J. Phys. A **42**, 504007 (2009).

[16] M. P. Hertzberg and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **106**, 050404 (2011).

[17] M. P. Hertzberg, J. Phys. A **46**, 015402 (2013).

[18] S. Seki and S.-J. Sin, Phys. Lett. B **735**, 272 (2014).

[19] G. Grignani and G. W. Semenoff, Phys. Lett. B **772**, 699 (2017).

[20] C. H. Bennett and D. P. DiVincenzo, Nature (London) **404**, 247 (2000).

[21] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Communication (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

[22] G. 'tHooft, Nucl. Phys. B **256**, 727 (1985).

[23] L. Susskind and J. Uglum, Phys. Rev. D **50**, 2700 (1994).

[24] D. Kabat, Nucl. Phys. B **453** 281, (1995).

[25] S. N. Solodukhin, Phys. Rev. Lett. **97**, 201601 (2006).

[26] D. V. Fursaev, JHEP **0609**, 018 (2006).

[27] M. Van Raamsdonk, *Comments on quantum gravity and entanglement*, arXiv:0907.2939.

[28] M. Van Raamsdonk, Gen. Rel. Grav. **42**, 2323 (2010).

[29] B. Czech, J. L. Karczmarek, F. Nogueira, and M. Van Raamsdonk, Class. Quant. Grav. **29**, 235025 (2012).

[30] B. Swingle and M. Van Raamsdonk, (2014) *Universality of gravity from entanglement*, arXiv:1405.2933.

[31] V. Balasubramanian, B. D. Chowdhury, B. Czech, and J. de Boer, JHEP **01**, 048 (2015).

[32] S. Ryu and T. Takayanagi, Phys. Rev. Lett. **96**, 181602 (2006).

[33] S. Ryu and T. Takayanagi, JHEP **0608**, 045 (2006).

[34] T. Faulkner, *The entanglement Renyi entropies of disjoint intervals in AdS/CFT*, [hep-th] arXiv:1303.7221.

[35] T. Faulkner, A. Lewkowycz and J. Maldacena, JHEP **11**, 074 (2013).

[36] T. Faulkner, M. Guica, T. Hartman, R. C. Myers, and M. Van Raamsdonk, JHEP **03**, 051 (2014).

[37] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).

[38] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **9**, 3292 (1974).

[39] S. W. Hawking, Comm. Math. Phys. **43**, 199 (1975).

[40] R. M. Wald, Living Rev. Rel. **4**, 6 (2001).

[41] S. Solodukhin, Living Rev. Rel. **14**, 8 (2011).

[42] D. V. Fursaev and S. N. Solodukhin, Phys. Lett. B **365**, 51 (1996).

[43] S. Solodukhin, Phys. Rev. D **52**, 7046 (1995).

[44] A. O. Barvinsky and S. N. Solodukhin, Nucl. Phys. B **479**, 305 (1996).

[45] M. Cvetic and D. Youm, Nucl. Phys. B **472**, 249 (1996).

[46] D. Youm, Phys. Rept. **316**, 1 (1999).

[47] A. Strominger and C. Vafa, Phys. Lett. B **379**, 99 (1996).

[48] C. G. Callan and J. M. Maldacena, Nucl. Phys. B **472**, 591 (1996).

[49] G. Horowitz and A. Strominger, Phys. Rev. Lett. **77**, 2368 (1996).

[50] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998).

[51] T. Azeyanagi, T. Nishioka and T. Takayanagi, Phys. Rev. D **77**, 064005 (2008).

[52] T. Lee, Ann. Phys. 183 (1988) 191.

[53] T. Lee, Phys. Lett. B **768**, 248 (2017).

[54] T. Lee, Jour. Kor. Phys. Soc. **71**, 886 (2017).

[55] T. Lee, Chin. Phys. C **42**, 113105 (2018).

[56] E. Witten, Nucl. Phys. B **268**, 253 (1986).

[57] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory Volume 1 and 2*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).

[58] T. Lee, K. S. Viswanathan, and Y. Yang, Jour. Kor. Phys. Soc. **42**, 34 (2003).

[59] T. Lee, EPJ Web of Conferences **168**, 07004 (2018).

[60] V. Balasubramanian and O. Parrikar, Phys. Rev. D 97, 066025 (2018).

[61] S. He, T. Numasawa, T. Takayanagi and K. Watanabe, JHEP **1505**, 106 (2015).

[62] L. A. Pando Zayas and N. Quiroz, JHEP **1501**, 110 (2015).

[63] L. A. Pando Zayas and N. Quiroz, JHEP **1611**, 023 (2016).

[64] Fujisaki H. and Nakagawa K., *Prog. Theor. Phys.* **82**, 236; 1017 (1989) ; **83**, 18 (1990) ; *Europhys. Lett.* **14**, 639 (1991) ; **20**, 677 (1992) ; **28**, 1; 471 (1994) ; **35**, 493 (1996) ; *Soryushiron Kenkyu* (Kyoto) **94** , D34 (1997) ; *Cosmological Constant and the Evolution of the Universe*, ed. by Sato K. *et al.* (Universal Academy Press, Tokyo, 1996) p. 249.

[65] Fujisaki H., Nakagawa K. and Sano S., *Nuovo Cim. A* **110**, 161 (1997) ; *Soryushiron Kenkyu* (Kyoto) **98**, A12 (1998) ; *Hoshi J. Gen. Educ.* **24**, 29 (2006).

[66] Fujisaki H., Sano S. and Nakagawa K., *Particle Cosmology*, ed. by Sato K. *et al.* (Universal Academy Press, Tokyo, 1998) p. 247.

[67] Nakagawa K., *Prog. Theor. Phys.* **85**, 1317 (1991) .

[68] Y. Hashizume and M. Suzuki, Physica A **392**, 3518 (2013) .

[69] K. Nakagawa, Prog. Theor. Exp. Phys. **2015**, 021A01 (2015).